Государственное бюджетное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
Губернский колледж города Похвистнево

Теория вероятностей

Составитель Москаленко Ангэлина Васильевна

Учебное пособие
Для студентов средних профессиональных
учебных заведений

Рассмотрено и одобрено ПЦК математического и
естественнонаучного цикла в качестве учебного пособия
для студентов среднего профессионального образования

г. Похвистнево 2013

Введение.

Настоящее пособие предназначено для самостоятельного изучения раздела «Теория вероятностей». Оно содержит краткое изложение теоретического курса и практическое применение, тестовые задания.

При изложении теоретического материала используются ключевые понятия и практическое их применение, что позволяет сформировать у студентов четкое представление о методах и способах применения теоретического материала на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен:

иметь представление:

- о роли и месте знаний по дисциплине в сфере профессиональной деятельности;

знать:

- основы комбинаторики и теории вероятностей;
- основы теории случайных величин;

уметь:

- рассчитывать вероятность событий;
- записывать распределения и находить характеристики случайных величин;

.

1. События. Операции над событиями

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие ***события***. «Случайное событие» (или просто «событие») следует рассматривать как исходное неопределяемое понятие теории вероятностей, как, например, понятия точки и прямой в евклидовой геометрии. Поясним его смысл.

Пример 1

Рассмотрим опыт (испытание), заключающийся в подбрасывании игральной кости (кубика с шестью гранями). Обозначим через ω_k выпадение k очков на верхней грани. Тогда событие - «выпадение четного числа очков» можно представить как множество $A=\{\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_6\}$.

Пример 2

Пусть в том же испытании нас интересует событие «выпадение 5 очков». Соответствующее множество $A=\{\omega_5\}$.

Итак, событие — это некоторое множество возможных исходов испытания. *Математической моделью события в теории вероятностей является множество.* Если это множество содержит один элемент, как в примере 3.2, то событие (исход) называется элементарным.

Множество Ω всех элементарных исходов испытания называется пространством элементарных событий данного испытания. В примере 3.1 $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}$.

Очевидно, событие всегда является некоторым подмножеством пространства элементарных событий: $A\subset\Omega$ (пример 3.1).

Если $\omega_i\in A$, то говорят, что элементарный исход ω_i благоприятствует событию *A*. Так в примере 3.1 событию A «выпало четное число очков» благоприятствуют элементарные исходы ω_2, ω_4 и ω_6.

Это означает, что событие A совершается, если наступает хотя бы один из исходов ω_2 или ω_4, или ω_6.

Итак, с каждым испытанием связано некоторое множество Ω – пространство элементарных событий этого испытания.

Очевидно, выбор пространства элементарных событий в каждом случае должен сообразовываться со смыслом конкретного испытания. Так, при подбрасывании игральной кости напрашивается «естественный» выбор пространства элементарных событий: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$. Но, допустим, игра заключается в ставках на «чет» — «нечет». Тогда нет нужды различать исходы ω_1, ω_3, ω_5 так же, как и исходы ω_2, ω_4, ω_6. В этом случае события $\omega_I=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$ и $\omega_{II}=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ следует считать элементарными, и пространство элементарных событий имеет вид $\Omega=\{\omega_I,\ \omega_{II}\}$.

Множество Ω, как и всякое множество, связанное с испытанием, является событием. Оно наступает при любом исходе испытания, так как $\omega_i\in\Omega$ $\omega_i\in\Omega$ при всех i. Поэтому множество Ω называют достоверным событием. Обычно достоверное событие обозначается U. Таким образом, $\mathrm{U}=\Omega$. Пустое множество $\varnothing$ интерпретируется как невозможное событие. В реальной ситуации это событие, которое никогда не наступает в данном испытании. Невозможное событие обычно обозначается V, т. е. V $=\varnothing$.

Операции над событиями – сумма, произведение и разность – определяются как соответствующие операции над множествами.

Пусть A и B являются подмножествами пространства Ω, т. е. событиями, которые могут произойти в результате одного и того же испытания.

Суммой (или *объединением*) событий A и B будет событие $A+B$ (или $A\cup B$), элементарные исходы которого благоприятствуют хотя бы одному из событий A или *B*. В реальном испытании это означает, что происходит, по крайней мере, одно из событий A или B (возможно, имеют место оба события).

Произведением (или *пересечением*) событий A и B называется событие AB (или $A \cap B$), элементарные исходы которого благоприятствуют и A и B. В реальном испытании событие AB заключается в том, что имеют место и событие A и событие B.

Разностью событий A и B называется событие $A \setminus B$, элементы которого благоприятствуют событию A, но не благоприятствуют B. В реальном испытании событие $A \setminus B$ заключается в том, что A произошло, а B не произошло. На рис.3.1 приведены соответствующие диаграммы Эйлера-Венна.

а б в

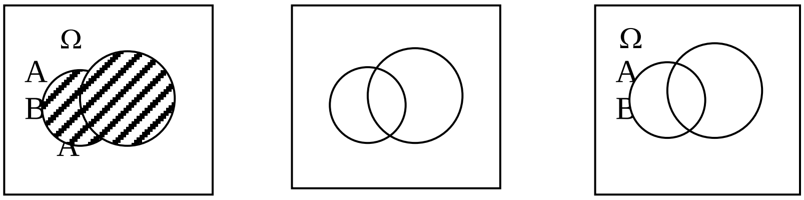

Рис 3.1

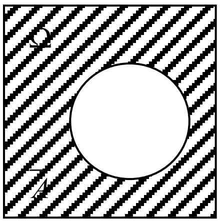

Рис. 3.2

Событие $\overline{A} = U \setminus A$ называется противоположным событию A (рис.3.2). Появление события $\overline{A}$ в испытании исключает возможность осуществления события A. Очевидно, $\overline{\overline{A}} = A$, $A + \overline{A} = U$.

События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = V$ (или то же самое можно записать $AB = \varnothing$).

Очевидно, противоположные события несовместны: $A\overline{A} = \varnothing$, (или тоже самое можно записать так $A \cap \overline{A} = V$).

С помощью введенных операции из некоторых заданных событий можно конструировать сложные события.

Пример 3

Производится три выстрела по мишени. Обозначим A_i (i = 1, 2, 3) – «попадание в $i-ом$ выстреле». Тогда 1) $A_1A_2A_3$ – «попадание во всех трех выстрелах»; 2) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ – «промах во всех трех выстрелах»; 3) $A_1 + A_2 + A_3$ – «хотя бы одно попадание»;

4) $A_1A_2\overline{A}_3$ + $A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$ – «ровно два попадания».

Пример 4

Построить пространство элементарных событий испытания, рассмотренного в примере 3.3.

Решение

При трех выстрелах возможны следующие исходы: «все три попадания», «попадание в первых двух выстрелах и промах в третьем» и т. д. Пространство элементарных событий имеет вид

$\Omega = \{A_1A_2A_3,\ A_1A_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3,\ \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$.

Если же нас интересует лишь факт поражения мишени хотя бы в одном выстреле, то для того же испытания пространство элементарных событии можно сконструировать значительно проще: $\Omega=\{A_1+A_2+A_3,\ \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$.

Для операций над событиями остаются справедливыми свойства действий над множествами:

1.	$A+B=B+A$;	5.	$A+A=A$;	9.	$AV=V$;
2.	$AB=BA$	6.	$AA=A$	10.	$AU=A$
3.	$A(B+C)=AB+AC$	7.	$A+V=A$	11.	$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$
4.	$A(BC)=(AB)C=ABC$	8.	$A+U=U$	12.	$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

2. Элементы комбинаторики

Перестановки – это такие комбинации из совокупности n различных элементов, которые отличаются только порядком следования элементов. Число перестановок из n элементов P_n вычисляется по формуле

$$P_n=n! \qquad (3.1)$$

Напомним, что $n!$ (читается: “nфакториал”) это произведение чисел от 1 до n): $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, при этом, для удобства записи некоторых формул, принимается, что $1!=1$ и $0!=1$.

Пример 5

Из цифр 1, 2, 3 можно составить трехзначные числа: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Каждая такая комбинация представляет собой перестановку из трех элементов. Число этих перестановок $P_3=3!=1\cdot 2\cdot 3=6$.

Размещения – это комбинации из n различных элементов по m элементов, которые отличаются составом элементов или порядком. Число размещений из n элементов по m элементов A_n^m вычисляется по формуле

$$A_n^m=n(n-1)\ \ldots\ (n-m+1) \qquad (3.2)$$

Пример 6

Из цифр 1, 2, 3 можно составить двухзначные числа 12, 21, 13, 31, 23, 32. Каждая такая комбинация представляет собой размещение из трех элементов по два элемента. Число этих размещений $A_3^2=3\cdot 2=6$.

Сочетания – это комбинации из n по m элементов, которые различаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по m элементов C_n^m вычисляется по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (3.3)$$

причем $C_n^0=C_n^n=1,\ C_n^1=n$.

Пример 7

Число способов, которыми группу из 12 рабочих можно разбить на бригады по три человека в каждой, равно

$$C_{12}^3=\frac{12!}{3!\cdot 9!}=\frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{6\cdot 9!}=220.$$

3. Классическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных событий некоторого испытания содержит n равновозможных исходов, и пусть m из них благоприятствуют событию A. Тогда вероятностью события A будет величина

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (3.4)$$

Применение формулы (3.4) для вычисления вероятности основано на интуитивном предположении о равновозможности (равновероятности) исходов испытания. Лишь по традиции формулу (3.4) называют *определением* вероятности. Ее следует рассматривать только как способ вычисления вероятности в испытаниях, исходы которых можно считать равновероятными.

Рассмотрим несколько простых примеров применения формулы (3.4).

Пример 8

Подбрасываются две монеты. Какова вероятность появления герба хотя бы на одной из них?

Решение

Обозначив Г – выпадение герба, Р – выпадение решетки, построим пространство элементарных событий: $\Omega = \{ ГГ,\ \ ГР,\ \ РГ,\ \ РР \}$. Все 4 исхода равновозможны, из них 3 благоприятствуют выпадению герба, поэтому $P(Г) = 3/4$.

Пример 9

Шесть карточек с буквами КМООСС разложены в одну линию в произвольном порядке. Какова вероятность того, что получилось слово КОСМОС?

Решение

В этом случае, пространство элементарных событий содержит так много исходов (МООССК, ООССКМ,...), что выписать его полностью очень непросто. Количество всех равновозможных исходов равно числу перестановок (формула (3.1)) из 6 элементов:

$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Число благоприятствующих исходов равно 4 (ничего не изменится, если поменять местами карточки с одинаковыми буквами О и С). Следовательно, $P(A) = \frac{4}{720} = \frac{1}{180}$.

Пример 10

Абонент забыл две последние цифры телефонного номера и, помня лишь, что они различны, набрал их наугад. Найти вероятность правильного соединения.

Решение

В этом случае общее количество исходов можно вычислить как
число размещений из 10 цифр 0, 1, ..., 9 по две (здесь существенен как состав, так и порядок этих двух цифр): $n = A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Так как благоприятствующий исход один, то $P = 1/90$.

Заметим, что если бы абонент не помнил и о различии забытых цифр, то вероятность верного соединения оказалось бы еще
меньше: $P = 0,01$ (подумайте, почему?).

Пример 11

В ящике имеется 3 красных и 7 белых шаров. Наугад извлекается 1 шар. Вероятность того, что он кажется красным, $P(1к) = 3/10$.

Пусть теперь из ящика с тем же содержимым наугад извлекаются 2 шара. Найти вероятности того, что а) оба окажутся красными (A_1); б) 1 окажется красным, 1 белым (A_2); в) оба окажутся белыми (A_3).

Решение

$P(A_1)=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}, \quad P(A_2)=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}, \quad P(A_3)=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}.$

Общее количество способов, которыми можно из 10 шаров извлечь 2, равно числу сочетаний (здесь порядок не имеет значения) из 10 по 2: $n=C_{10}^2=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$.

Число благоприятствующих исходов находится так:

а) $m=C_3^2=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=3$; б) $m=C_3^1\cdot C_7^1=3\cdot 7=21$;

в) $m=C_7^2=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}=21$.

Тогда $P(A_1)=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}, \quad P(A_2)=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}, \quad P(A_3)=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}.$

Заметим, что множество $\Omega=\{A_1,A_2,A_3\}$ составляет пространство элементарных событий испытания «из ящика, содержащего красные и белые шары, наугад извлекаются 2 шара».

Событие «извлекается какая-нибудь пара шаров», т. е. событие $A_1+A_2+A_3$ есть событие достоверное, при этом

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(U)=\frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}=1.$$

То же самое получаем, складывая вероятности

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{5}+\frac{7}{15}+\frac{7}{15}=1.$$

Вообще, в ситуациях, когда действует классическое определение, имеет место свойство $P(U)=1$. Кроме того, если события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ попарно несовместны, то $P\left(A_1+A_2+\ldots+A_k\right)$ =

$=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\ldots+P\left(A_k\right)$.

Пример 12

Пусть, как и в предыдущем примере в ящике 3 красных и 7 белых шаров. Наугад извлекается 5 шаров. Найдем вероятность $P(2к,3б)$того, что 2 из них окажутся красными и 3 – белыми.

Решение

Общее число способов, которыми можно извлечь 5 шаров из 10, равно C_{10}^5. Следовательно общее число исходов испытания равно C_{10}^5. Число способов, которыми из трех красных шаров можно извлечь 2 шара, равно C_3^2. С каждым из этих способов сочетаются все комбинации, которые можно получить, извлекая 3 шара из 7 белых, т. е. C_7^3. Таким образом, число благоприятствующих исходов равно $C_3^2\cdot C_7^3$. Следовательно, $P(2к,3б)=$

$=\frac{C_3^2\cdot C_7^3}{C_{10}^5}=\frac{5}{12}$.

Пример 13

(Гипергеометрическое распределение). В ящике содержатся N шаров, среди которых M красных и $N-M$ белых. Наугад извлекаются n шаров. Требуется найти вероятность того, что среди них окажется ровно m красных (и $n-m$ белых).

Искомая вероятность находится по формуле:

$$P_n(m)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (3.5)$$

В общем случае рассмотренная задача может быть сформулирована следующим образом. В группе из N предметов имеются M предметов, обладающих некоторым свойством α, остальные $N - M$ предметов этим свойством не обладают. Из этой группы наугад выбираются n предметов. Чему равна вероятность события «в выборке оказалось ровно m предметов, обладающих свойством α»?
Формула (3.5) каждому значению 0, 1, 2..., m (количеству предметов, обладающих свойством α), ставит в соответствие вероятность появления этого количества. Можно сказать, что формула (3.5) определяет *распределение* вероятностей. *Распределение* вероятностей, определяемое формулой (3.5), называется гипергеометрическим.
Рассмотренная задача играет большую роль в приложениях: в демографии, статистике населения, статистическом контроле качества промышленной продукции и т. д. При желании с помощью формулы (3.5) можно найти вероятность угадывания любого числа из разыгрываемых номеров в спортлото (см. также задание 4 тренировочного теста в конце раздела).
Во всех приведенных примерах применение формулы (3.4) основывалось на предположении о равновозможности исходов испытания. Такое предположение оправдано в случаях симметрий условий: при подбрасывании идеального кубика, при извлечении наугад хорошо перемешанных шаров и т. д. Но даже в этих простейших случаях равновозможность исходов является предположением (допущением). Если же такое допущение невозможно (а в реальном мире идеальных кубиков не бывает), то классическое определение оказывается непригодным.

4. Аксиоматическое определение вероятности

Вероятность события в современном построении курса определяется аксиоматически (аксиоматическая структура теории вероятностей была предложена советским математиком А. Н. Колмогоровым в 1933 году). Дадим это определение в упрощенной трактовке.

Пусть $A \subset \Omega$, т. е. событие A образовано из каких-нибудь исходов пространства элементарных событий некоторого испытания. Числовая функция $P(A)$, определенная на множестве всех событий этого испытания, называется вероятностью события A, если она удовлетворяет следующим аксиомам:
Аксиома 1: $P(A) \geq 0$.
Аксиома 2: вероятность достоверного события $P(U) = 1$.
Аксиома 3: если A_1, $A_2, ... A_n$ попарно несовместные события, то
$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$ – вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

В аксиоматическом определении свойства вероятности, справедливые для испытаний с равновозможными исходами, обобщены на случай произвольных испытаний. Эти свойства, в общем случае, ниоткуда не следуют, они постулируются. Именно так, с помощью некоторого набора аксиом, определяются исходные понятия в современной математике.

Можно показать, что «классическое определение» вероятности (3.4) получается как частный случай аксиоматического определения, если исходы испытания равновероятны,

Без доказательства приведем несколько следствий из аксиом 1–3:

1. $P(V) = 0$, (V – невозможное событие).
2. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.
3. $P(A) \leq 1$, (вместе с аксиомой 1 имеем $0 \leq P(A) \leq 1$).
4. Если исходы ω_1, ω_2, …, ω_n образуют пространство элементарных событий, то $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$.
5. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5. Статистическое определение вероятности

Лишь в случае испытаний с равновозможными исходами мы можем каждому исходу приписать определенную вероятность, как это делалось в разделе 3.3. В общем случае с помощью аксиоматического определения вероятности нельзя найти численные значения вероятностей событий в реальных испытаниях. Каким же образом формальное аксиоматическое определение вероятности связано с действительностью? Такая связь основана на универсальной закономерности природы, составляющей суть так называемого «статистического определения вероятности».

Пусть производится серия однотипных реальных испытаний, в каждом из которых может наступить (или не наступить) событие *A*. Относительной частотой события *A* является величина $P^*(A)=\frac{m}{n}$, где m – число испытаний, в которых событие A наступило, n – общее число испытаний в серии.

Пример 14

Партия, содержащая 100 деталей, подвергается контролю. 10 деталей оказались бракованными. Относительная частота события A («деталь бракованная») $P*(A)=\frac{10}{100}=0{,}1.$

Очевидно, относительная частота может меняться от серии к серии. В то же время экспериментально установлен очень важный факт: при осуществлении известных условий с ростом n величина $P^*\left(A\right)$ с некоторого момента начинает колебаться около определенного числа, все меньше от него отклоняясь. Это число называют вероятностью события A в статистическом смысле.

Фундаментальное свойство устойчивости относительных частот позволяет установить связь теории вероятностей – математической дисциплины – с многочисленными практическими приложениями. Благодаря этому свойству оказалось возможным приписывать событиям определенные вероятности, значения которых находятся экспериментально. Как показывает опыт, для классических испытаний с равновозможными исходами относительная частота $P^*\left(A\right)$, устанавливаемая эмпирически при большом числе повторений, и вероятность $P\left(A\right)$, получаемая из соображений симметрии, отличаются весьма незначительно.

6. Условная вероятность

В реальности вероятность какого-либо события A зависит от осуществления других событий B, C, . . . , т.е. зависит от некоторых условий. Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* события A относительно события B. Такая вероятность обозначается $P\left(A/B\right)$ (или $P_B\left(A\right)$).

Пример 3.15

Студент, из 30 билетов выучил первые 20. На экзамен он пришел одним из последних, когда осталось только 8 билетов с 17-го по 24-й (событие B ={17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24}). Обозначим *A* = {студенту достался знакомый билет}.

Если, придя на экзамен, студент не получил никакой информации об оставшихся билетах, то по классическому определению $P\left(A\right)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$. Если же он узнал, что событие B произошло, то для него вероятность получить выученный, билет изменится. Общее число возможных исходов теперь – это число оставшихся билетов – 8. Благоприятствующие исходы {17, 18, 19, 20}, их число – 4. Вероятность события *A* при условии, что имело место событие *B* («условная вероятность») $P(A/B)=$

= 4/8 =1/2.

Можно показать, что для классического испытания с равновозможными исходами имеет место формула

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (3.7)$$

Формула (3.7) принимается за *определение условной вероятности* и в общем случае.

Можно показать, что величина $P(A/B)$, определенная формулой (3.7) удовлетворяет аксиомам вероятности 1–3, поэтому (3.7) называют четвертой аксиомой вероятности.

7. Теорема умножения вероятностей

Из равенства (3.7) следует, что

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B). \qquad (3.8)$$

Эта формула называется *теоремой умножения вероятностей.*

Обобщения теоремы умножения на случай трех и большего числа событий соответственно имеют вид

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2). \qquad (3.9)$$

$$P\left(A_1A_2...A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\cdot P\left(A_3/A_1A_2\right)\cdot...$$
$$...\cdot P\left(A_n/A_1A_2...A_{n-1}\right) \qquad (3.10)$$

Пример 16.

Из 20 вопросов программы студент выучил 16. Требуется найти вероятность того, что 3 предложенных вопроса окажутся знакомыми (событие A).

Решение

Обозначим A_i - событие «$i-й$ вопрос оказался знакомым» (i = 1, 2, 3). Тогда $A=A_1A_2A_3$. Можно представить, что вопросы записаны на отдельных карточках и выбираются наугад один за другим (без возвращения). Тогда $P\left(A_1\right)=\frac{16}{20}$, $P\left(A_2/A_1\right)=\frac{15}{19}$ (вероятность получения второго знакомого вопроса при условии, что первый оказался знакомым), P (вероятность третьего «везения» при условии, что знакомыми оказались оба первых вопроса). По формуле (3.9)

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}=\frac{28}{57}.$$

События A и B называются *независимыми* (нужно не путать с *несовместными*), если выполняется условие

$$P(A/B)=P(A), \qquad (3.11)$$

или эквивалентное ему условие

$$P(B/A)=P(B). \qquad (3.12)$$

На практике независимость событий означает, что появление одного из них не изменяет вероятности другого или появление одного из них не несет информации, о другом.

События $A_1, A_2,...A_n$ называются независимыми, если каждое из них не зависит от каждого из остальных и от всевозможных произведений остальных событий.

Для независимых событий теорема умножения принимает простой вид

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)..P(A_n). \qquad (3.13)$$

В частности, для двух независимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (3.14)$$

Пример 17
В ящике 16 белых и 4 черных шара. Требуется найти вероятность того, что 3 последовательно извлеченных шара окажутся белыми (событие *A*), если после каждого извлечения шар возвращается в ящик, и все шары снова перемешиваются.

Решение

Обозначим A_i – «$i-й$ шар оказался белым». В отличие от примера 3.16 события A_1, A_2, A_3 независимы. По формуле (3.14)

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{16}{20} \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{16}{20} = \frac{64}{125}.$$

8. Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), \qquad (3.15)$$

Соотношение (3.16) называется *теоремой сложения вероятностей* для совместных событий. Если события *A* и *B* *несовместны*, тогда $AB = V$ (V – невозможное событие), $P(AB) = P(V) = 0$ – следствие из аксиом вероятности. В этом случае формула (3.15) принимает вид

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (3.16)$$

Подчеркнем, что соотношение (3.16) имеет место только для несовместных событий и совпадает с аксиомой 3.

Пример 18
Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания (событие *A*) для первого стрелка 0,7, вероятность попадания (событие *B*) для второго стрелка 0,8.
Считая попадания независимыми событиями, найти вероятность поражения мишени хотя бы одним стрелком (т, е. вероятность события $A+B$).

Решение

1-й способ. События A и B совместны, поэтому следует воспользоваться формулой (3.15):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94.$$

При подсчете вероятности произведения в силу независимости событий A и B, использовалась формула (3.14).

2-й способ. Сначала найдем вероятность противоположного события – промаха обоими стрелками $\overline{A}\overline{B}$. Полагая, что промахи также независимые события, имеем $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \quad = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$ (воспользовались следствием 5 пункта 3.4). Тогда $P(A+B) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - 0,06 = 0,94$.

Преимущества второго способа заметно проявляются в случае большого числа событий.

9. Формула полной вероятности

Пусть событие *A* может произойти только при осуществлении одного из событий $H_1, H_2, \ldots H_n$ (они называются гипотезами), которые попарно несовместны и образуют пространство элементарных событий некоторого испытания. Известны вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$ (i=1, 2, . . .). Тогда вероятность события A находится по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \qquad (3.17)$$

Пример 19

Партия содержит 20% деталей, изготовленных заводом I, 30% – заводом II, 50% –заводом III. Для завода I вероятность выпуска бракованной детали равна 0,05, для завода II – 0,01, для завода III – 0,06. Чему равна вероятности того, что наудачу взятая из партии деталь окажется бракованной (событие *A*)?

Решение

Обозначим $H_i\ (i=1,2,3)$ гипотезу «деталь изготовлена 1-м заводом». Вероятности гипотез нам известны: $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}3$, $P(H_3)=0{,}5$. Даны также условные вероятности: $P(A/H_1)=0{,}05$, $P(A/H_2)=0{,}01$, $P(A/H_3)=0{,}06$. По формуле полной вероятности (3.16) находим $P(A)=0{,}2\cdot 0{,}05+0{,}3\cdot 0{,}01+\ +0{,}5\cdot 0{,}06=0{,}043$.

10. Случайные величины и законы распределения

Величина X называется *случайной*, если в результате испытания она может принимать одно и только одно значение из некоторого множества значений, причем заранее неизвестно какое именно.

Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее значений конечно или счетно. Счетным называется множество, элементы которого можно пронумеровать: $X=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$ Вместо слов "дискретная случайная вели

чина" иногда будем писать сокращенно ДСВ.

Пример 20

Производится 3 выстрела по мишени. Обозначим *X* число попаданий, тогда *X* = {0, 1, 2, 3} – ДСВ.

Случайная величина называется *непрерывной*, если ее значения заполняют некоторые интервалы. Например, отклонение снаряда от цели $X=\{x : x\in[0,r_0]\}$ – непрерывная случайная величина. Вместо слов "непрерывная случайная величина" иногда будем писать сокращенно НСВ.

11. Закон распределения дискретной случайной величины

Законом распределения ДСВ называется любое правило, по которому каждому значению x_i случайной величины X ставится в соответствие его вероятность p_i.

Например, по формуле (3.5) вычисляются вероятности значений m = 0, 1, 2, ... Это пример аналитического (с помощью формулы) задания закона распределения ДСВ.

Часто закон распределения ДСВ задается с помощью таблицы:

Таблица 3.1

X	x_1	x_2	. . .	x_n
P	p_1	p_2	. . .	p_n

Пример 21

Найти закон распределения числа выпадений гербов при двух бросаниях монеты.

Решение

В данной задаче испытанием является два подбрасывания монеты. Обозначая *г* – выпадение герба, а *р* – выпадение решки,

составим пространство элементарных событий данного испытания $\Omega=\{pp, pг, гp, гг\}$.

Случайной величиной X является число выпадений гербов. Очевидно, что при двух бросаниях монеты герб может выпасть 0, 1 или 2 раза, поэтому $X=\{0,1,2\}$. Вычислим вероятности этих значений:

$P(X=0)=P(pp)=\dfrac{1}{4}=0{,}25;$

$P\left(X=1\right)=P\left(рг+гр\right)=P\left(рг\right)+P\left(гр\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5;$

$P\left(X=2\right)=P\left(гг\right)=\frac{1}{4}=0{,}25.$

Полученные данные запишем в таблицу:

Таблица 3.2

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

12. Свойства дискретных распределений

Пусть закон распределения ДСВ задан в виде табл. 3.1, тогда имеют место следующие соотношения:

1. $\sum\limits_{x_1 \in X} p_i = 1.$

Здесь суммируются вероятности всех значений x_i величины X.

Это свойство называется условием нормировки для ДСВ.

2. $P\left(x_k \le X \le x_m\right)=\sum\limits_{i=k}^{m} p_i$ – вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

3. $P\left(X<x\right)=\sum\limits_{x_i<X} p_i$.

13. Функция распределения

Вероятность $P\left(X<x\right)$ того, что случайная величина X окажется меньше некоторого вещественного числа x, называется *функцией распределения* случайной величины *X*, обозначается $F\left(x\right)$ и определяется следующим образом:

$$P\left(x\right)=P\left(X<x\right) \qquad (3.18)$$

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F\left(x\right) \le 1$, т.к. это вероятность (по определению (3.18)).

2) $x_2 > x_1 \Rightarrow F\left(x_2\right) > F\left(x_2\right)$ ($F\left(x\right)$ – неубывающая функция x);

3) $F\left(-\infty\right)=0$, т. к. $F\left(-\infty\right)=P\left(X<-\infty\right)=P\left(V\right)=0.$

4) $F\left(+\infty\right)=1$, т. к. $F\left(+\infty\right)=P\left(X<+\infty\right)=P\left(U\right)=$ 1.

Напомним, *V* – невозможное событие, *U* – достоверное событие.

Пример 22

Построить функцию распределения для случайной величины X – числа выпадения гербов при двух бросаниях монеты.

Решение

1) $x<0$, $F\left(x\right)=0$.

2) $x\in\left[0,1\right)$, $F\left(x\right)=0{,}25.$

3) $x\in\left[1,2\right)$, $F\left(x\right)=0{,}25+0{,}5=0{,}75.$

4) $x\ge 2$ $F\left(x\right)=0{,}75+0{,}25=1.$

Отметим, что понятие функции распределения имеет место не только для дискретной, но и для непрерывной случайной величины.

Пример 23

Определим функцию распределения НСВ следующим образом:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16} & при\ x\in(0,4],\\ 1 & при\ x>4.\end{cases} \qquad (3.19)$$

Очевидно, она удовлетворяет свойствам 1 – 4.

С помощью функции распределения вычисляется вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha). \qquad (3.20)$$

Например, для случайной величины, определенной функцией распределения (3.19), получаем

$$P(2\le X<5)=F(5)-F(2)=1-\frac{4}{16}=\frac{3}{4}.$$

14.Плотность вероятности

Отметим, что вероятность попадания НСВ в заданную точку равна нулю. Действительно, $P(X=x)=\lim\limits_{x\to\infty}P(x<X<x+\Delta x)=$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[F(x+\Delta x)-F(x)\right]$**=0.**

Поэтому, можно говорить только о вероятности попадания ДСВ в некоторый интервал. Вероятность попадания случайной величины x в интервал $(x,x+\Delta x)$обозначим ΔP:

$\Delta p=P(x\le x\le x+\Delta x)$.

$$\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta p}{\Delta x}=\frac{dp}{dx}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}$.

Распределение НСВ обычно задается плотностью вероятности $f(x)$, которая определяется как производная функции распределения:

$$f(x)=F'(x) \qquad (3.22)$$

Смысл функции $f(x)$ выясним из преобразований

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}$$

т. е. $f(x)$– это вероятность попадания случайной величины в бесконечно, малый интервал длиной Δx, стягивающийся к точке *x*.

Пример 21. Найдем плотность вероятности для случайной величины, определенной функцией распределения (3.20);

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8} & при\, x\in(0,4],\\ 0 & при\ x\notin(0,4].\end{cases} \qquad (3.23)$$

График функции распределения показан на рис. 4.

Свойства плотности вероятности:

1) $f\left(x\right)\ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx = 1$ – условие нормировки для НСВ;

3) $F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x} f\left(t\right)dt$.

Если задана плотность вероятности НСВ *X*, то вероятность ее попадания в интервал $\left[\alpha,\beta\right]$ находится по формуле

$$P\left(\alpha\le X<\beta\right)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx \qquad (3.24)$$

15. Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием случайной величины X (обозначается $\mathrm{M}\left[X\right]$ или m_x) называется величина

$$\mathrm{M}\left[X\right]=m_x=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (3.25)$$

Вероятностный смысл математического ожидания ДСВ – это число, около которого группируются средние значения случайной величины с ростом числа испытаний.
Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$m_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f\left(x\right)dx. \qquad (3.26)$$

Пример 21.
Пусть распределение ДСВ задано таблицей:
Таблица 3.1

X	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти математическое ожидание m_x.

Решение

$m_x=0\cdot 0,2+1\cdot 0,5+3\cdot 0,5=1,4$.

Пример 22.
Пусть распределение НСВ задано плотностью вероятности (3.24):

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}\ \ \textit{при}\ x\in(0,4],\\ 0\ \ \textit{при}\ \ x\notin(0,4].\end{cases} \qquad (3.27)$$

Найти математическое ожидание m_x.

Решение

$$m_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot 0dx+\int\limits_{0}^{4} x\cdot\frac{x}{8}dx+\int\limits_{4}^{\infty} x\cdot 0\, dx=\frac{8}{3}\approx 2,67$$

16. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

Обозначение дисперсии $D\left[X\right]$ или D_x. По определению,

$$D_x=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right] \qquad (3.28)$$

Для ДСВ это означает (см. (2.7))

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^2 p_i \qquad (3.29)$$

для НСВ (см. (2.8)):

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x\right)^2 f\left(x\right) dx \qquad (3.30)$$

Дисперсия характеризует рассеивание случайной величины относительно ее математического ожидания.

Формулы (3.30) и (3.31) можно преобразовать к более удобному для вычислений виду

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2 \qquad (3.31)$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f\left(x\right) dx - m_x^2 \qquad (3.32)$$

Пример 22

Найдем дисперсию ДСВ по табл. 4: $D_x = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,5 + 3^2 \cdot 0,3 -$ (1,1) ^{2} = 1,99.

Пример 23

Найдем дисперсию НСВ, заданной плотностью вероятности (3.28):

$$D_x = \int_0^4 x^2 \frac{x}{8} dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

Чаще рассеивание характеризуют средним квадратическим отклонением – величиной, имеющей ту же размерность, что и сама случайная величина *X:*

$$\sigma\left[x\right] = \sigma_x = \sqrt{D_x} \qquad (3.33)$$

В примере 3.22 $\sigma_x = \sqrt{1,99} \approx 1,44$, в примере 3.28 $\sigma_x = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,94$.

Свойства дисперсии:

1) $D_x \geq 0$

2) $D\left[C\right] = 0$

3) $D\left[Cx\right] = c^2 x$.

17. Другие числовые характеристики случайной величины

1. Мода (Мо). Модой ДСВ называется ее наивероятнейшее значение. Например, по таблице 2.4: Мо = 1.

Модой НСВ называется значение X = Мо, соответствующее максимуму плотности вероятности $f\left(x\right)$. Для случайной величины в примере 2.4 Мо=4.

2. Квантили. Число K_p называется p - *м* квантилем распределения, если оно удовлетворяет уравнению $F\left(x\right) = p$, где $F\left(x\right)$ – функция распределения (см. (2.3)).

Так как $F\left(x\right) = P\left(X < x\right)$, $F\left(K_p\right) = p$, то $F\left(K_p\right) = P\left(X < K_p\right) = p$.

Таким образом, K_p – это точка, левее которой случайная величина попадает с вероятностью *p*. Для НСВ квантиль K_p может быть найден из уравнения

$$\int_{-\infty}^{K_p} f\left(x\right) dx = p \qquad (3.35)$$

(см. свойство 3 плотности вероятности в подразделе 2.5).
Квантили $K_{0,1}$, $K_{0,2}$, . . . , $K_{0,9}$ называются децилями. Квантили $K_{0,01}$, $K_{0,02}$, . . . , $K_{0,99}$ называются процентилями.

Пример 2.14. Найдем 25-й процентиль $K_{0,25}$ распределения (2.5). По определению $F\left(K_{0,25}\right)=0,25$ или из (2.20):

$$\int_{-\infty}^{K_{0,25}} f(x)\,dx=0,25 \Rightarrow \int_{0}^{K_{0,25}} \frac{x}{8}\,dx=0,25 \Rightarrow \frac{x^2}{16}\Big|_0^{K_{0,25}}=0,25 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow$$

$$\frac{K_{0,25}^2}{16}=0,25 \Rightarrow K_{0,25}^2=4 \Rightarrow K_{0,25}=2\ .$$

(отрицательный корень отбрасываем, так как в интервал $(-\infty,0)$ случайная величина X не попадает).

7. Медиана (Me). Медианой называется половинный квантиль: Me = $K_{\frac{1}{2}}$. Очевидно, значения случайной величины *X с* одинаковой вероятностью 0,5 могут оказаться как левее, так и правее точки X =Me.

Например, для распределения (2.1) имеем;

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)\,dx=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{Me^2}{16}=\frac{1}{2} \Rightarrow Me=\sqrt{8}\approx 2,83$$

(найдите на графике к примеру 2.4 точки $K_{0,25}$, Me, m_x). Отметин, что для распределений, симметричных относительно m_x, Mo = Me = m_x.

18. Биномиальное распределение (распределение Бернулли)

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью *p*. Такая ситуация называется схемой Бернулли. Требуется найти вероятность того, что событие A появляется ровно *k* раз. Искомая вероятность обозначается $P_n(k)$ и находится по формуле Бернулли

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (3.36)$$

Здесь $q=1-p$, C_n^k – число сочетаний из *n* элементов по *k*.

По формуле (3.36) можно найти вероятность того, что событие A появляется в *n* испытаниях 0, 1, 2, …, *n* раз. Такое распределение вероятностей называется *биномиальным*.

Пример 24. Производится 4 выстрела по мишени с вероятностью попадания 0,8 в каждом выстреле. Найти вероятность 1) ровно двух попаданий, 2) ровно трех попаданий.

Решение

1. $P_4(2)=C_4^2(0,8)^2(0,2)^2=6\cdot 0,64\cdot 0,04\approx 0,15$,
2. $P_4(3)=C_4^3(0,8)^3(0,2)=4\cdot 0,512\cdot 0,2\approx 0,41$.

Заметим, что события (*k* = 0), (*k* = 1), ... (*k* = *n*) несовместны и в сумме образуют достоверное событие $\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1$.

Основные числовые характеристики биномиального распределения вычисляются по формулам

$m_x = np$, $D_x = npq$, $\sigma_x = \sqrt{npq}$ (3.37)

В примере 2.15 $m_x = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$; $D_x = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}64$; $\sigma_x = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Мода (наивероятнейшее значение) биномиального распределения k_0 находится из неравенства

$np - q \le k_0 \le np + p$ (3.38)

При этом, если $np - q$ есть целое число, то биномиальное распределение имеет две моды: $Mo_1 = k_0 = np - q$ и $Mo_2 = k_0 + 1 = np - q + 1 = np + p$.

Пример 25

Найти наивероятнейшее число попаданий при четырех выстрелах в примере 1.1.

Решение. $4 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le k_0 \le 4 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \Rightarrow 3 \le k_0 \le 4 \Rightarrow Mo_1 = 3$, $Mo_2 = 4$.

При этом вероятности 3 и 4 попаданий одинаковы:

$P_4(3) = P_4(4) \approx 0{,}41$.

19. Нормальное распределение (закон Гаусса)

Нормальное распределение задается плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.39)$$

Можно показать, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Кривая $y = f(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 3.1.

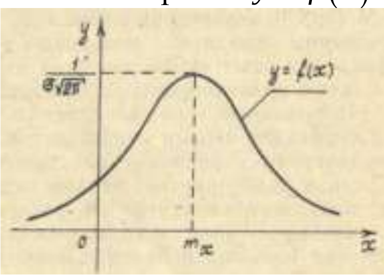

Рис. 3.1.

Параметры m и σ в формуле (2.20) являются соответственно математическим ожиданием $(m = m_x)$ и средним квадратическим отклонением $(\sigma = \sigma_x)$ нормально распределенной случайной величины X.

Кривая нормального распределения $y = f(x)$ симметрична относительно линии $x = m$, поэтому $\mathrm{Mo} = \mathrm{Me} = m_x = m$.

Введем функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (3.40)$$

Таблица значений функции $\Phi(x)$ приведена в прилож. 2. Свойства функции Лапласа

1) $x_2 > x_1 \Rightarrow \Phi(x_2) > \Phi(x_1)$, т.е. $\Phi(x)$ монотонно возрастает.

2) $\Phi(0) = 0$;

3) $\Phi(\pm\infty) = \pm 0{,}5$;

4) $\Phi(x) = 0{,}5000$, если $x \ge 5$;

5) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т.е. $\Phi(x)$ нечетная функция.

Функция распределения для нормального закона находится через функцию Лапласа (2.21) по формуле

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) + \frac{1}{2} \qquad (3.41)$$

С помощью функции Лапласа находится вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right) \qquad (3.42)$$

Для интервала, симметричного относительно математического ожидания, формула (2.23) дает следующее:

$$P(m_x - l < X < m_x + l) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right)$$

или

$$P(|X - m_x| < l) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right) \qquad (3.43)$$

Если в формуле (2.24) положить $l = 3\sigma$, то получим

$$P(|X - m_x| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973 \qquad (3.44)$$

все (99,73%) значения нормально распределенной величины попадают в интервал $I = (m_x - 3\sigma, m_x + 3\sigma)$. Этот факт называют «правилом трех сигм». Интервал I называется зоной практического рассеивания.

Нормальный закон встречается чаще всего в приложениях теории вероятностей. Им с большой моделируются реальные .распределения размеров и веса изделий в одной партии, отклонения точек попадания снаряда от цели, ошибки измерений, распределение людей по росту, по интеллектуальным возможностям и т. д.

Пример 26

Шарики для подшипников отбраковываются так: если они проходят в отверстие диаметром d_2, но не проходят в отверстие диаметром $d_1 < d_2$, то признаются стандартными. Пусть допуск, т. е. интервал $[d_1, d_2]$, составляет 2/3 зоны практического рассеивания. Требуется предсказать долю шариков, прошедших отбраковку.

Решение. Диаметр шарика – случайная величина *X*, распределенная по нормальному закону с математическим, ожиданием $(d_1 + d_2)/2$ и средним квадратическим отклонением σ. По условию $d_2 - d_1 = \frac{2}{3}6\sigma = 4\sigma$. По формуле (3.24) находим

$$P(|L - m_x| \le 2\sigma) = 2\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4782 \approx 0,95.$$

Таким образом, при назначенном допуске 95% изготовленных шариков окажутся стандартными.

Пример 27

1	Математическое ожидание	А) 0,5; Б) 0,4; В) 0,6; Г) 0,25; Д) 0,3.
2	Среднее квадратическое отклонение	А) $\sqrt{3,24}$; Б) $\sqrt{1,57}$; В)

		$\sqrt{4,95}$; Г) $\sqrt{2,83}$; Д) $\sqrt{5,17}$.
3	$P\ (X < 1)$	А) 0,2; Б) 0,3; В) 0,4; Г) 0,5; Д) 0,6.
4	Функцию распределения $F(x)$ в точке $x = 3$	А) 0,5; Б) 0,9; В) 0,8; Г Г) 0,6; Д) 0,7.
5	$P(1 < X < 3)$	А) 0,5; Б) 0,4; В) 0,3; Г) 0,2; Д) 0,1.
6	Производится один выстрел по мишени с вероятностью попадания 0,8. Найдите дисперсию числа попаданий.	А) 0,25; Б) 0,16; В) 0,53; Г) 0,47; Д) 0,28.
7	Какие из функций могут служить функциями распределения для некоторой случайной величины? 1) $F(x)=\begin{cases} e^{-2x}, x \le 0, \\ 1 \quad , x > 0. \end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases} 0, \ x < 2, \\ 1, \ x \ge 2. \end{cases}$ 3) $F(x)=\begin{cases} x^2 \ , \ 0 < x \le 1 \\ 1 \ , \ x > 1 \end{cases}$.	А) только 1; Б) только 1 и 2; В) только 2; Г) только 2 и 3; Д) только 1 и 3.

Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 8$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_x = 3$. Найти $P(5<X<9)$.

Решение

По формуле (2.23) имеем

$$P(5 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{5-8}{3}\right) = \Phi(0,33) + \Phi(1) = 0,1293 + 0,03985 \approx 0,17$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ

По закону распределения

X	-2	0	2	4
P	0,2	0,4	0,3	0,1

в задачах 1– 5 найдите следующее.

По функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \ x < 0, \\ x - 0,25x^2 & при \ x \in [0,2], \\ 1, & при \ x > 2. \end{cases}$$

найдите:

8	Плотность вероятности	
9	$P(X < 1)$	А) 0; Б) 0,5; В) 0,25; Г) 0,75; Д) 1.
10	$P(1 < X < 4)$	А) 0,25; Б) 0,5; В) 0,75; Г) 1; Д) 0.
11	Математическое ожидание	А) $\frac{2}{5}$; Б) $\frac{3}{4}$; В) 0;

		Г) $\frac{2}{3}$; Д) 0.
12	Среднее квадратическое отклонение	А) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; Б) $\sqrt{\frac{2}{9}}$; В) $\sqrt{\frac{4}{7}}$; Г) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; Д) $\sqrt{\frac{7}{2}}$.
13	$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\notin\left[0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\\ \frac{3}{2}x^2, & x\in\left[0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\end{cases}$ Найти медиану.	А) $\sqrt{\frac{11}{5}}$; Б) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; В) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; Г) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; Д) $\sqrt{\frac{1}{3}}$.
14	В тесте содержится 30 независимых заданий, к каждому заданию на выбор предлагается 5 ответов (правильный ответ один). За правильный ответ начисляется один балл, за неправильный – вычитается 0,25 балла. Найти наивероятнейшее число полученных студентом баллов, если все ответы выбираются наугад.	А) 1; Б) 0; В) –0,25; Г) –0,75; Д) 0,50;
15	Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием равным 1, и средним квадратическим отклонением 0,2. $P\left(0,4<X<1,2\right)=\ldots$	А) 0,73264; Б) 0,34261; В) 0,52761; Г) 0,16329; Д) 0,83995;

Ответы:
1В, 2А, 3Д, 4Б, 5В, 6Б, 7Г, 8Б, 9Г; 10А; 11Г; 12Б, 13Д, 14В, 15Д.

Литература:

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]/ В.Е. Гмурман, – М.: Высшая школа, 2009. – 367с.

2. Калинина, В.Н. Математическая статистика [Текст] / В.Н. Калинина, В.Ф. Панкин. – М.: Высшая школа, 2010. – 235с.

3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2009. – 305с.

4. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Яковлев Г.Н. Математика в 2-х томах [Текст]: учеб. пособ. / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Г.Н. Яковлев. – М.: Новая волна, 2010. – 287с.